Exercícios de Combinatória Extremal
Livro Extremal Combinatorics: capítulos 27,28 e 29

Caio Valentim
Iam Jabour

27 de Janeiro de 2010

Capítulo 27

Exercício 1

Vamos provar que tomar $n = R_r(2; l)$ é suficiente.

Seja $\chi : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., r\}$ uma coloração qualquer. Vamos criar uma coloração χ' dos pares x, y tal que $\chi'(x, y) = \chi(|x, y|)$

Pela escolha do n sabemos que existe um conjunto de E, tal que $|E| \leq l$ e para qualquer par $x, y \subseteq E$ e $\{t, z\} \subseteq E$ $\chi'(x, y) = \chi'(t, z)$. Sejam $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_l$ os elementos desse conjunto E.

Sabemos que a coloração χ atua da seguinte forma sobre esses elementos: $\chi(x_2 - x_1) = \chi(x_3 - x_2) = ... = \chi(x_l - x_{l-1}) = \chi(x_l - x_1)$

Fazendo $z_1 = x_2 - x_1, z2 = x_3 - x_2, z_l - 1 = x_l - x_l - 1ez_l = x_l - x_1$ e observando que $z_1 + z_2 + ... + z_{l-1} = z_l$ chegamos ao resultado. $\square$

Exercício 2

Tome $\chi : n = R_r(2; 3)$ e a partir da coloração χ obtenha uma nova coloração $\chi' : \chi'(\{x, y\}) = \chi(\{x, x + 1, ..., y\})$

Pelo tamanho do n, existe um conjunto 3-subconjunto-monocromático [1],segundo nossa definição. Suponha que $x \leq y \leq z$ são os elementos desse conjunto. Nós sabemos que:

$\chi'(\{x, y\}) = \chi'(\{y, z\}) = \chi'(\{x, z\})$ então

$\chi(\{x, x + 1, ..., y\}) = \chi(\{y, y + 1, ..., z\}) = \chi(\{x, x + 1, ...z\})$

Escolhendo $A = \{x, x+1, ..., y\}$ e $B = \{y, y+1, ..., z\}$ obtemos o resultado desejado. $\square$

Exercício 5

Sabemos que cada subconjunto de $(r + 1)$-elementos irá contribuir com pelo menos um par monocromático, pois existem r cores e o subconjunto tem $r+1$ elementos.

Contudo, se pegarmos todos os $\binom{n}{r+1}$ subconjuntos estaremos contando alguns pares várias vezes. Para alguns acertarmos a conta, basta perceber que cada par monocromático está em exatamente $\binom{n-2}{r-1}$ subconjuntos. Assim temos:

total de pares monocromáticos $= A \geq \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n-2}{r-1}} = \frac{n^2+n}{r^2+r}$

Basta tomar $c = \frac{1}{r^2+r}$ para satisfazer $A \geq c \cdot n^2$ $\square$

[1] um n-subconjunto-monocramático é o subconjunto dos n elementos do conjunto de N elementos para o qual vale $N = R_r(k; n)$, ou seja os n elementos que recebem a mesma cor na coloração $R_r(k; n)$

Exercício 6

Queremos provar que $R(s,t) \leq \binom{s+t-2}{s-1}$.

Usando a identidade $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Tomando $n = s+t-2$ e $k = s-1$

Por hipótese indutiva sabemos que: $R(s-1,t) \leq \binom{s+t-3}{s-2}$

Também por hipótese indutiva: $R(s,t-1) \leq \binom{s+t-3}{s-1}$

Então: $\binom{s+t-3}{s-2} + \binom{s+t-3}{s-1} = \binom{s+t-2}{s-1}\square$

Exercício 7

Para termos um $K9$ colorido com 2 cores (azul e vermelha) onde não existe um triangulo de cor vermelha, nem um 4-clique de cor azul. Então cada vértice deverá ter exatamente três arestas vermelhas e cinco azuis, caso contrário violaremos a restrição.

Com isso, teremos que ter exatamente $(9 \cdot 3)/2$ arestas vermelhas. Porém não será possível criar tal coloração, pois sempre haverá de existir mais uma aresta que criará ou um triangulo vermelho ou um 4-clique azul.

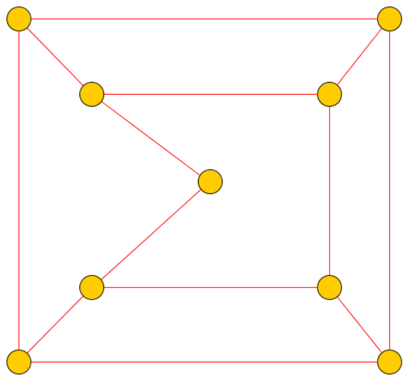

Figura 1: Exemplificação do exercício 7

Na figura 1, caso seja adicionado mais uma aresta ao vértice central, o único com grau 2, formaremos um triangulo vermelho (3-clique vermelho). Caso contrário, se não adicionarmos a aresta que esta faltando, teremos um conjunto independente de grau 4 (4-clique azul).

Exercício 8

Pelo exercício 27.7, onde provamos que $R(3,4) \leq 9$ existe um 4-clique azul ou um 3-clique vermelho. Com isso, imagine que temos 3 arestas vermelhas saindo de um vértice x e se ligando a 3-clique vermelho, então teremos um 4-clique vermelho. Senão, continuaremos com o 3-clique vermelho. Caso contrário, continuaremos com o 4-clique azul.

A figura 2 exemplifica o que queremos demostrar.

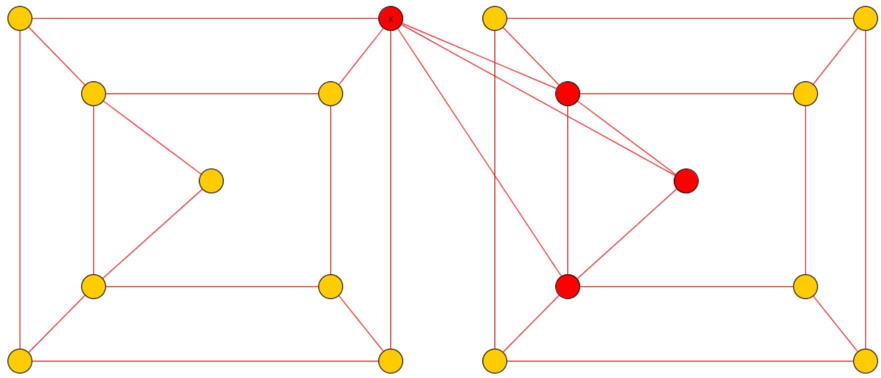

Figura 2: Exemplificação do exercício 8

Capítulo 28

Exercício 1

Seja S um conjunto sum-free, é fácil ver que $S \cap (S+S) \neq \varnothing$. Vamos mostrar que $S+S \geq |S|$. Seja $a_1, a_2, ..., a_m$ os elementos de S. Tome um a_i arbitrário.

$a_i + a_1 \neq a_i + a_2 \neq ... \neq a_i + a_m$.

Logo, $|S+S| \geq |S|$, pois $\{a_i + a_1, a_i + a_2, ..., a_i + a_m\} \subseteq S + S$

Como isso e o fato de S e $S+S$ serem disjuntos, temos: $2|S| \leq |S| + |S+S| \leq |G| \rightarrow |S| \leq |G|/2$ em particular $\alpha(G) \leq |G|/2$. $\square$

Exercício 3

1) Para todo $x \in G$, $|A \cap (x - B)| \geq 1$
Prova: $|A \cap (x-B)| = |A| + |(x-B) - |A \cup (x-B)| \geq |A| + |B| - |A \cup (x-B)| \geq |A| + |B| - |G| \geq 1$

2) Agora supunha que $A + B \neq G$. Então existe um $x \in G$ Tal que $\forall a \in A, b \in B \rightarrow a + b \neq x$, ou seja, $a \neq x - b$ para todo a e b. Então $|A \cap (x-B)| = 0$ o que gera uma contradição.

Exercício 5

caso 1) $|A| + |B| \leq |G|$

Nesse caso, podemos usar o teorema de Kneser notando que o único subconjunto próprio de $\mathcal{Z}_p$ é trivialmente $H = \{0\}$. Assim $|A+B| \geq |A| + |B| - |H| = |A| + |B| - 1$.

caso 2) $|A| + |B| > |G|$

Vamos mostrar que $|A+B| \geq |A| + |B| - 1$. Sejam os elementos $a_1, a_2, ..., a_{|A|}$ em ordem crescente e $b_1, b_2, ..., b_{|B|}$ os elementos de B em ordem também crescente, então:

a_1	$a_1 + b_1$	$a_1 + b_2$	...	$a_1 + b_{\|B\|}$
a_2	$a_2 + b_1$	$a_2 + b_2$	...	$a_2 + b_{\|B\|}$
...	...	...	...	...
$a_{\|A\|}$	$a_{\|A\|} + b_1$	$a_{\|A\|} + b_2$	...	$a_{\|A\|} + b_{\|B\|}$

Note que os elementos da linha de a_1 são todos únicos e que os elementos das linhas posteriores são maiores que todos os que já apareceram. Logo, são também únicos. $\square$

Exercício 8

Seja S o número de subconjuntos de $\{1, ..., n\}$ que são sum-free.

(i) Se n é impar existem $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ elementos ímpares.

Como qualquer subconjunto de números ímpares é sum-free,
temos $S \geq 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$

(ii) Se n é par podemos pegar qualquer subconjunto de $\{\frac{n}{2}, \frac{n}{2+1}, ..., n\}$ (como a soma de qualquer dois elementos dessa sequência é maior que n, todos os subconjuntos são sum-free). Então $S \geq 2^{\frac{n}{2}}$

Logo, por (i) e (ii), $S \geq c \cdot 2^{\frac{n}{2}}, c > 0$

Capítulo 9

Exercício 1

Considere uma coloração qualquer χ com duas cores do cubo $\{0, 1\}^r$

Seja o conjunto de palavras: $0^i 1^{r-1}, \forall i = 0, 1, ..., r$.

Pelo princípio da casa de pombo, com r cores e $r + 1$ palavras, existem $s, k (s < k)$ tal que: $\chi(0^s r^{r-s}) = \chi(0^k r^{r-k})$ e essas palavras formam uma linha monocromática

Exercício 2

Pelo teorema de Waerden existe uma progressão aritmética de tamanho $\{a + jd : j \leq t^2\}$ com t^2 termos.

Suponha que a cor dessa progressão seja $c1$

(i) Existe algum $jd, 1 \leq j \leq t$, com a cor $c1$. Então, basta construir uma progressão $\{a + kd' : k \leq t\}, d' = jd$

Note que o menor número de elementos nessa progressão ocorre quando $j = t$. Nesse caso temos $\frac{a+t^2d}{td} \geq t$ elementos. Ou seja, tem pelo menos t termos e satisfaz o pedido.

(ii) Se não existir nenhum jd, $1 \leq j \leq t$ com a cor $c1$, então todos os números $\{d, 2d, 3d, ..., td\}$ receberam a mesma cor $c2$. Nesse caso, esta sequência satisfaz o resultado. Pos d (a razão) tem cor c2 e todos os outros termos tem a mesma cor. Além disso, a sequência tem exatamente t termos.